

1 – Prérequis

Etude de fonction : calcul d'un domaine de définition, calcul de dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du domaine.

2 – Objectifs pédagogiques de l'APP1

A l'issue de cet APP, l'étudiant devra savoir étudier une fonction, et en particulier les points suivants :

- calculer un domaine de définition
- calculer une dérivée
- dresser un tableau de variation
- calculer les limites aux bornes du domaine (détecter les formes indéterminées, savoir les lever par conjugaison, changement de variables, mise en facteur du terme prépondérant)
- déterminer les asymptotes
- justifier la présence d'optimums
- résoudre de manière approchée les équations du type $f(x) = a$
- savoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction ou sa dérivée.

3 – Présentation du problème

Présentation générale

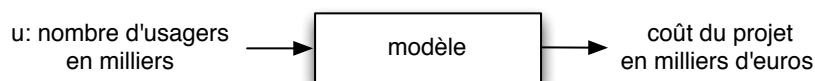
Vous êtes chef de projet dans un bureau d'étude, vous encadrez une équipe d'ingénieurs spécialistes en modélisation mathématique. Un investisseur a l'intention de financer un site de réseau social, sur le modèle de facebook. Avant de se lancer dans ce projet, il souhaite avoir une idée de combien il va devoir investir. Pour cela, il fait appel à votre bureau d'étude et il vous pose deux questions. Votre rôle est d'y répondre, de manière précise, détaillée et justifiée :

1. Existe-t-il un nombre d'utilisateurs qui minimise le coût du projet ?
Si oui, pouvez-vous donner une approximation de ce nombre optimal ?
2. L'investisseur dispose de la somme fixe de 5 000 euros, combien d'utilisateurs pourra-t-il avoir sur votre réseau ?

Etapes du travail

Pour répondre à ces questions, vous allez travailler en deux phases :

1. D'abord identifier un bon modèle pour le problème, du type :



2. Et ensuite seulement vous répondrez aux questions, pour le modèle que vous aurez choisi.

Caractéristiques d'un bon modèle

Pour choisir le modèle, vous savez que le coût total du projet doit tenir compte de trois contributions, dont aucune ne peut être négligée : le coût incompressible, le coût des serveurs, et enfin celui de la publicité, avec les caractéristiques suivantes :

1. Le coût incompressible (infrastructures, salaire des développeurs du site) est fixe et indépendant du nombre d'utilisateurs du réseau.
2. Chaque utilisateur disposera d'un espace pour le stockage de ses données personnelles (photos par exemple), la taille des serveurs (et leur coût) sera donc proportionnelle au nombre d'abonnés.
3. Au début du projet, quand il y aura peu d'abonnés, vous devrez payer de la publicité pour votre réseau, et vous en ferez de moins en moins, à mesure que le réseau grandira et que vous profiterez de la publicité faite par vos abonnés à leurs amis.

Modèles proposés

Vous avez demandé à vos ingénieurs modélisateurs de vous proposer des modèles, parmi lesquels vous allez devoir choisir celui qui répond le mieux aux 3 caractéristiques. Voici ce qu'ils vous ont proposé :

Modèle 1.

$$c_1(u) = u - 30\sqrt{u} + 400$$

Modèle 2.

$$c_2(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{50} - 16u + 4000 & \text{si } u \in [0; 500] \\ 1,8u + 99 + \frac{1}{u - 499} & \text{si } u \in]500; +\infty[\end{cases}$$

Modèle 3.

$$c_3(u) = \sqrt{9u^2 + 325}$$

Modèle 4.

$$c_4(u) = \begin{cases} 1000 - 100 \times \frac{e^{\frac{u}{1000}} + e^{-\frac{u}{1000}}}{2} & \text{si } u \in [0; 1000] \\ 1110,42 \times \frac{e^{\frac{u}{1000}} - e^{-\frac{u}{1000}}}{e^{\frac{u}{1000}} + e^{-\frac{u}{1000}}} & \text{si } u \in]1000; +\infty[\end{cases}$$